**Остапчук Н.О.**

**вчитель математики РЕПЛ**

**Передмова**

 Даний посібник для тих, хто хотів би узагальнити і поглибити свої знання з математики для кращої підготовки до контрольних випробувань МАНу, до підготовки до ЗНО.

 Задачі згруповано так, що всі завдання кожної групи мають близькі за змістом умови та (або) однаковий метод розв’язання. Класифікований та систематизований підбір задач дає інформацію про методичну спрямованість в роботі з обдарованими дітьми з математики при підготовці до випробувань та олімпіад з математики. Для самостійного розв’язання наведені завдання різної складності, які пропонувались на контрольних випробуваннях протягом останніх років.

**1.Тотожні перетворення алгебраїчних виразів.**

* Обчислити суму:

а) 

б) 

в) 

г) 

* Знайдіть відношення , якщо 12х = 25z і 8у = 15z.
* Обчислити значення виразу:

, якщо 3m – 2n = 0,8(8m + 3n).

* Доведіть, що число є раціональне.
* Обчислити без калькулятора:



* Довести, що 
* Без зведення до спільного знаменника знайти суму:

.

**2. Алгебраїчні рівняння.**

* Розв’язати рівняння:

а) 

б) (1;2)

в) (1024)

г) (-3;4)

* Не розв’язуючи рівняння 3х2 + 17х – 14 = 0, знайти значення виразу:

, де х1, х2 корені заданого рівняння. 

* Визначити суму дійсних коренів рівняння:

 (7)

* Розв’язати рівняння:







* При яких значеннях параметра а обидва корені рівняння
(а – 1)х2 + 2(а + 1)х + а – 2 = 0 від’ємні?
* При яких значеннях параметра а рівняння х4 – (а – 3)х2 + а2– 5а = 0 має три різні корені?
* х1 та х2 – корені рівняння х2 – (2а – 3)х + а2 – 4 = 0. Знайдіть значення а, при яких використовується рівність 3х1 + 3х2 = х1х2.
* При яких значеннях параметра а рівняння  не має розв’язків?
* При яких а різниця коренів рівняння 2х2 – (а +1)х + (а – 1) = 0 дорівнює їх добутку?

**3. Системи алгебраїчних рівнянь.**

* Розв’язати систему рівнянь:

а) 

б) 

в) 

г) 

д) 

е) 

* При яких значеннях параметра а система рівнянь має безліч розв’язків?



* Знайти найменше значення параметра а, при якому система має єдиний розв’язок:



* Скільки розв’язків має система рівнянь:

в залежності від значення параметра а.

**4. Показникові рівняння:**

* Розв’язати рівняння:

а) 0,4х-1 = 6,256х-5 
б) 32х-153х+2 =  (-3)

в) 9х + 6х = 22х+1 (0)

г)  д)  (-2;2)

е)  (-2;2)

* При яких значеннях параметра t рівняння  має від’ємні корені?
* Знайти всі значення параметра а, при яких рівняння 4х – а2х – а + 3 =0 має хоча б один дійсний корінь. 
* Розв’язати систему:



* При яких значеннях параметра а рівняння має два дійсних різних розв’язки? Знайти ці розв’язки:

36х + (а – 1) 6х + а – 2а2 = 0.

**5. Логарифмічні рівняння:**

* Розв’язати рівняння:

а) ( 13)

б)  (4)

в)  (8)

г)  (10;0,001)

д)  (0)

* Для кожного значення параметра а розв’язати рівняння:

а) 

б) 

в) 

**6. Нерівності**

* Розв’язати нерівності:

а) 

б)  

в)  (-2;2)

г)  

д)  

е) 

* Знайти найбільший від’ємний цілочисельний розв’язок нерівності:



* При всіх дійсних значеннях параметра а розв’язати нерівність:

а) 36х – (а – 4) 6х – 2а2 + 10а – 12 >0

б) 16х2 + (а + 3) 4х – 2а2 + 3а + 2 >0

в) logх(х – а) >2

г) logа2(х2 + 2х) <1.

* При яких значеннях m нерівність  виконується для будь – яких х?

**7. Область визначення функції.**

 Нагадаємо, що функція (вираз) у множині дійсних чисел має зміст, якщо:

* знаменник дробу відмінний від нуля;
* вираз, що входить під знак кореня парного степеня, невід’ємний;
* вираз, записаний під знаком логарифма, додатній;
* вирази, які є аргументами арксинуса чи арккосинуса, за модулем не перевищують одиниці.

1.Знайти область визначення функції:

а) 

б)  

в) 

г)  

д) 

е)  

є)  (2;8]

ж) 

**8. Похідна функції і деякі її застосування.**

* Знайти значення похідної функції f(х) в точці х = х0

а) f(x) = (x2 – x)(x + 1); x0 = 2 (11)

б)   (0)

в)  х0=0. (-2)

* Знайти інтервали зростання і спадання функції:

а)  при  для

б) у = lnx – x при  при 

* Дана функція f(x) = (3 – 5а)х – ах3. Знайти множину всіх значень параметра а, при яких рівняння f’(x) = 0 має дійсні корені. (0;0,6]
* Скласти рівняння дотичної до графіка функції у = cos2х в точці з абсцисою , у= - х + 
* Скласти рівняння дотичної до кривої в точці її перетину з віссю ОХ. у = х + 1
* Знайти точку, в якій дотична до графіка функції у = 2х2 – lnx паралельна до осі ОХ. (0,5;0,5+ln2)

**9. Прогресії.**

 ***Арифметична прогресія*** (а1 – перший член; d – різниця; n – число членів; аn – n-й член; Sn – cума n перших членів):

аn = а1 + d(n – 1) – формула n – го члена;

Sn = – формули суми n перших членів;

ак= (k = 2,3,….n-1) – характеристична властивість.

***Геометрична прогресія*** (b1 – перший член; q – знаменник q0);

n – число членів, bn – n-й член; Sn – сума n перших членів):

bn = b1qn-1 – формула n – го члена;

b2к = bк-1 bк+1 (к = 2,3,…., n – 1) – характеристична властивість;

S = (q1) – формула суми n перших членів;

S = – формула суми нескінченно спадної геометричної прогресії (

1. Сума шостого і дев’ятого членів арифметичної прогресії дорівнює 20, а їх добуток дорівнює 64. Знайти десятий член цієї прогресії, якщо її перший член від’ємний.

(20)

2. Розв’язати рівняння:

х +х2+…+хn+…=

3. Сума першого і п’ятого членів арифметичної прогресії дорівнює , а добуток третього і четвертого її членів дорівнює . Знайти суму 17 перших членів цієї прогресії.

4. Сума трьох чисел, які утворюють арифметичну прогресію, дорівнює 2, а сума квадратів цих квадратів цих же чисел дорівнює . Знайти ці числа.

5. Знаменник геометричної прогресії дорівнює , четвертий член цієї прогресії дорівнює , а сума всіх її членів дорівнює . Знайти кількість членів прогресії.

(5)

6. Розв’язати рівняння:

2х+1+х2 – х3+х4 – х5+…=, де

7. При якому значенні х значення виразів 2х – 1, х+3, х+15 будуть послідовними членами геометричної прогресії? Знайти члени цієї прогресії.

8. Чотири числа становлять геометричну прогресію. Якщо до них додати відповідно 7, 9, 8 і 1, то нові числа утворюватимуть арифметичну прогресію. Знайдіть ці числа.

9. Сума нескінченної геометричної прогресії дорівнює 32, а сума її перших 5 членів дорівнює 31. Знайти перший член прогресії.

10. спростити вираз:

*Довідковий матеріал*

***Планіметрія***

**1. Довільний трикутник** (a, b, c – сторони; – протилежні їм кути; Р – периметр; р – півпериметр; R – радіус описаного кола; r – радіус вписаного кола; S – площа; ha, ma, la – висота, медіана та бісектриса, які проведені до сторони а):

1) а + bс; а + с b; b+са; ++ = ;

2) S = аha; S = ;

3) r = ; R = ;

4) а2 = b2 + с2 – 2bс соs (теорема косинусів);

5) (теорема синусів);

6) три медіани трикутника перетинаються в одній точці, яка лежить строго всередині трикутника. Точка перетину ділить медіани на відрізки, довжини яких відносяться як 2:1, починаючи від відповідної вершини;

7) три бісектриси трикутника перетинаються в одній точці, яка лежить строго всередині трикутника. Точка перетину бісектрис рівновіддалена від сторін трикутника (центр вписаного кола). Бісектриса при перетині ділить сторону на відрізки, пропорційні прилеглим сторонам трикутника;

8) три висоти трикутника перетинаються в одній точці;

9) три перпендикуляри, проведені із середин сторін трикутника, перетинаються в одній точці. Ця точка рівновіддалена від вершин трикутника і є центром описаного кола.

**2. Прямокутний трикутник** (а, b – катети; с – гіпотенуза; ас, bс – проекції катета на гіпотенузу):

1) S = аb; S = сhс;

2) r = ; R = ;

3) a2 + b2 = c2 (теорема Піфагора);

4)

5) .

**3. Рівносторонній трикутник:**

1).

**4. Довільний опуклий чотирикутник** (d1, d2 – діагоналі; – кут між ними; S – площа):

**5. Паралелограм** (а та – суміжні сторони; – кут між ними; S – площа):

S = аhа = а=; d12 + d22 = 2(a2+b2)

**6. Ромб:**

S = aha = a2

**7. Прямокутник:**

S = ab =

**8. Квадрат** (d – діагональ): .

**9. Паралелограм** можна вписати в коло тоді і тільки тоді, коли він є прямокутником.

**10. У паралелограма** можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли він є ромбом.

**11. Трапеція** (а та b – основи; h – відстань між ними; с, d – бічні сторони; l – середня лінія):

 l = ; S = .

**12. У трапецію** можна вписати коло тоді і тільки тоді, коли а + b = с+ d.

**13. Трапецію** можна вписати в коло, якщо вона рівнобедрена.

**14.** Якщо через точку М, взяту всередині кола, проведені дві хорди АВ і СD, то:

АММВ = СМ МD

Якщо з точки М, взятої поза колом, проведена до кола дотична МА (А – точка дотику) і січна МВС (МВ – зовнішня частина січної, ВС – внутрішня її частина), то

МА2 = МС МВ.

**15. Коло, круг** (r – радіус; l – довжина кола; S – площа круга):

l = 2r; S = r2.

**16. Сектор** (l – довжина дуги, яка обмежує сектор; n0 – градусна міра центрального кута; – радіанна міра центрального кута):

l =

***Метод координат***

**1.**Відстань між двома точками М1(х1;у1) і М2(х2;у2):



**2.** Координати точки М(х;у), яка ділить відрізок М1М2 (М1(х1;у1), М2(х2;у2)) у заданому відношенні :

; 

Координати середини відрізка М1М = ММ2 (λ = 1):

; 

**3.** Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом у = kx + b, де k = tg, – кут між прямою і віссю Ох; b – ордината точки перетину прямої з віссю Оу.

**4.** Рівняння прямої, яка проходить через точку М0(х0;у0) в напрямку, з кутовим коефіцієнтом к: у – у0 = к(х – х0).

**5.** Рівняння прямої, яка проходить через дві точки М1(х1;у1) і М2(х2;у2):



**6.** Гострий кут між двома прямими у = к1х + b1 і у = к2х + b2:



**7.** Відстань від точки М0(х0;у0) до прямої Ах + Ву + С = 0:



**8.** Рівняння кола з центром в точці С(х0;у0) і радіусом R:

(х – х0)2 + (у – у0)2 = R2

***Вектори***

**1.**Розклад вектора за ортами координатних осей:



де Х, У – координати вектора (проекції вектора на координатні осі), а – одиничні вектори координатних осей відповідно Ох, Оу.

**2.** Якщо задані точки М1(х1, у1), М2(х2, у2), то вектор



**3.** Довжина (модуль) вектора = (Х;У): =

**4.** Якщо = (Х1;У1) і = (Х2;У2), то:

 



**5.** Якщо = (Х1;У1) і = (Х2;У2) колінеарні (паралельні), то:



**6.** Скалярний добуток двох ненульових векторів і :



де, – кут між векторами і

Якщо = (Х1;У1) і = (Х2;У2),то:



 **7.** Кут між векторами = (Х1;У1) і = (Х2;У2):



**8.** Умова перпендикулярності ненульових векторів і :

 

**9.** Проекція вектора на напрямок вектора :

 

***Стереометрія***

*(V – об’єм, Sбіч – площа бічної поверхні, Sпов – повна поверхня)*

**1.Призма** (S – площа основи; Н – висота)



**2. Піраміда** (S – площа основи; Н – висота)



**3. Об’єм зрізаної піраміди** (Н – висота; S1, S2 – площа основи)



**4. Циліндр** (R – радіус основи; Н – висота)

  

**5. Конус** (R – радіус основи; Н – висота; l - твірна)

  

**6. Зрізаний конус** (R, r – радіуси основи, Н – висота; l - твірна)

 

**7. Куля** (R – радіус)

 

**8. Кульовий сегмент** (R – радіус кулі; h – висота сегменту)

 

***Задачі***

1.Два кола радіусів R і r дотикаються зовні. Знайти відстань від точки дотику до спільної дотичної, проведеної до цих кіл.

2. Площа рівнобічної трапеції, діагональ якої 2 см, дорівнює см2. Знайдіть градусну міру кута між діагоналями трапеції.

3. З точки, яка лежить поза площиною, проведено до площини дві похилі, довжини яких дорівнюють 15 см і 27 см. Сума довжин проекцій цих похилих на площину дорівнює 24 см. Знайдіть проекцію кожної з похилих.

4. Периметр прямокутного трикутника дорівнює 24 см, а радіус вписаного кола – 2 см. Знайдіть радіус кола, описаного навколо трикутника.

5. У коло вписано чотирикутник ABCD, діагоналі якого взаємного перпендикулярні й перетинаються в точці Е. Пряма, що проходить через точку Е і перпендикулярна до АВ, перетинає сторону CD у точці М. Доведіть, що ЕМ – медіана трикутника CЕD, і знайдіть її довжину, якщо АD = 8, АВ = 4, <CDВ =

6. У рівнобедрений трикутник із кутом 1200 при вершині й бічною стороною, що дорівнює α, вписано коло. Знайти радіус цього кола.

7. Знайти кут між твірною конуса і площиною основи, якщо площа бічної поверхні конуса дорівнює сумі площ основи й осьового перерізу.

8. На стороні АВ трикутника АВС позначено точку М так, що АМ:МВ = 4:3. У якому відношенні медіана ВК ділить відрізок СМ?

9. Бісектриса АМ трикутника АВС (<С = 900) поділяє катет ВС на відрізки завдовжки 6 см і 10 см. Знайти радіус кола, яке проходить через точки А, С і М.

10. Довести, що радіус r кола, вписаного в прямокутну трапецію обчислюється за формулою , а і b основи трапеції.

11. Знайти площу трикутника зі сторонами

12. Площа рівнобічної трапеції дорівнює S, кут між її діагоналями, протилежний бічній стороні, дорівнює α. Знайти висоту трапеції.

13. У прямокутному трикутнику АВС (<С = 900) проведено висоту СD. Радіуси кіл, вписаних у трикутники АСD і ВСD, дорівнюють 0,6 см і 0,8 см. Знайти радіус кола, вписаного в трикутник АВС.

14. Вектори і перпендикулярні, причому = 5, а = 12. Знайдіть .

15. Визначте кут між векторами і + у градусах, якщо відомо, що (2;2), (2;4) і (- 2; - 6).

16. Основи трапеції дорівнюють 4 см і 16 см. Знайти радіуси двох кіл: вписаного в трапецію й описаного навколо неї, коли відомо, що ці кола існують.

17. На меншій основі рівнобедреної трапеції побудовано правильний трикутник, висота якого дорівнює висоті трапеції, а площа в 5 раз менша за площу трапеції. Знайти кут при більшій основі трапеції.

18. Дві сторони трикутника дорівнюють 25 см і 30 см, а його площа становить 300 см2. Знайдіть третю сторону.

19. Периметр паралелограма 60 см. Знайти площу, якщо сторони паралелограма відносяться як 2:3, а його гострий кут дорівнює 300.

20. Медіани трикутника дорівнюють 24, 30, 18 см. Обчисліть площу трикутника.

21. Знайдіть площу паралелограма, діагоналі якого дорівнюють 16 см і 20 см, а одна із діагоналей перпендикулярна до його сторони.

22. У прямокутному трикутнику медіани катетів дорівнюють і . Знайдіть гіпотенузу.

23. Чи можна накрити фігуру, має форму трикутника зі сторонами 13 см, 14 см і 15 см, кругом радіуса 8 см. Відповідь обґрунтувати.

24.Знайти площу трикутника з вершинами в точках А(1;1), В(4;5), С(3;6).

25. Сторони трикутника 12 см, 15 см, 18 см. Знайти бісектрису трикутника, проведену з вершини його найбільшого кута.

***МАН 2013 – 2014***

***9 клас***

**І рівень**

1.У сплаві міді й олова масою 12 кг міститься 45% міді. Скільки олова (у кг) потрібно додати до цього сплаву, щоб у ньому було 40% міді?

2. Доведіть, що значення виразу 86 – 47 кратне 6.

3. Зовнішній кут правильного многокутника становить внутрішнього. Знайдіть кількість сторін цього многокутника.

**ІІ рівень**

4. Знайдіть площу трапеції, основи якої 10 см і 14 см, а бічні сторони 13 см і 15 см.

5. Побудуйте графік функції у = .

**ІІІ рівень**

6. При яких значення параметра а рівняння х2 – 2(а+2)х +4а + 5 =0 має корені різного знаку?

7. На відрізку АС дано точку В, причому АВ = 14 см, ВС = 28 см. На відрізках АВ, ВС, АС як на діаметрах побудовано півкола в одній півплощині відносно прямої АС. Знайти радіус кола, що дотикається до всіх трьох півкіл.

***10 клас***

**І рівень**

1.Розв’яжіть систему рівнянь:



2. Розв’яжіть рівняння: х2 + 2

3. Три кути опуклого многокутника дорівнюють по 1200, а решта – по 1600. Знайдіть кількість сторін многокутника.

**ІІ рівень**

4. Розв’язати нерівність: .

5. Основи трапеції дорівнюють 2 см і 8 см. Знайдіть радіуси кіл: вписаного в трапецію й описаного навколо трапеції, коли відомо, що такі кола існують.

**ІІІ рівень**

6. При яких значеннях m нерівність виконується для будь – яких х.

7. На відрізку АС дано точку В, при чому АВ = 14 см, ВС = 28 см. На відрізках АВ, ВС і АС як на діаметрах побудовано півкола в одній півплощині відносно прямої АС. Знайти радіус кола, що дотикається до всіх трьох півкіл.

***11 клас***

**І рівень**

1.Знайти цілі розв’язки нерівності

2. Обчисліть значення похідної функції f(x) = 5 в точці х0 = 1.

3. У , АВ = 26 см. Знайти довжину меншого катета трикутника.

**ІІ рівень**

4. Розв’язати рівняння sin2x = cos4 – sin4.

5. Побудуйте графік рівняння

**ІІІ рівень**

6. В основі прямої призми з висотою b лежить квадрат зі стороною а. у призмі побудовано переріз, який є перпендикулярним до діагоналі бічної грані й проходить через вершину основи. Знайти площу перерізу, якщо a<b.

7. Розв’яжіть нерівність: logx1< - 1